Per què entonen bé les guitarres amb trasts no paral·lels?

Miquel Albertí Palmer
Alberti.miquel@gmail.com

Resum

Les guitarres tradicionals tenen els trasts paral·lels. El teorema de Tales justifica la seva bona entonació des d'una perspectiva geomètrica gràcies al sistema de rectes paral·leles i transversals compost pels trasts i les cordes. Però ja fa uns anys que les guitarres sense trasts paral·lels s'han fet populars. Sense paral·lelisme de cordes ni de trasts, quina causa justifica la seva bona entonació? La resposta és un teorema geomètric sobre la conservació de la proporcionalitat malgrat l'absència de paral·lelismes. Tot plegat té implicacions rellevants per a la recerca matemàtica en un àmbit laboral i artesà com és el de la lutieria i per a l'educació, fent de la guitarra un recurs d'aprenentatge matemàtic a través del qual parla la geometria.

Abstract

Traditional guitars are built with parallel frets. From a geometric perspective, Thales' theorem explains their intonation thanks to the parallel and transverse straight lines composed by the frets and strings. But since several years ago, guitars without parallel frets have become quite popular. Without parallelism of strings or frets, how is their correct intonation explained? The answer is a geometric theorem concerning the conservation of proportionality despite the lack of any parallelism. All this has important implications for mathematical research in a labour and artisanal field such as lutherie and for education, making the guitar a mathematical learning resource through which geometry speaks.

D'uns anys ençà, les guitarres amb trasts no paral·lels s'han fet populars. Són les anomenades guitarres d'escala múltiple o de trasts en ventall. Es diuen així perquè els trasts semblen les varetes d'un ventall, tot i que, a diferència del que passa en aquest objecte, les prolongacions dels trasts d'aquestes guitarres no convergeixen en un punt. Els trasts de les guitarres d'escala única, que són paral·lels, sí que convergeixen en un punt: el de l'infinit.

Les guitarres d'escala múltiple es diuen així perquè les longituds vibrants de les cordes són totes diferents. Això no vol dir que les longituds vibrants de les cordes en guitarres d'escala única siguin idèntiques, sinó que la longitud d'escala, és a dir, la longitud vibrant de les cordes, ve determinada per la distància entre el trast zero (celleta) i el trast infinit (celleta del pont) (figura 1). Com que en les guitarres d'escala única ambdues celletes són paral·leles, la distància que les separa és l'escala de la guitarra. Les longituds vibrants de les sis cordes són lleugerament diferents, ja que aquestes sí que s'obren en ventall, atesa la major separació al pont que a la celleta. La retícula que formen les cordes i els trasts d'una guitarra d'escala única és trapezoidal. En canvi, la retícula de les guitarres d'escala múltiple no és trapezoidal, sinó quadrilàtera (no trapezoidal). Les anomenarem retícules sonores.

Des d'una perspectiva geomètrica, veurem que el teorema de Tales sobre la proporcionalitat de segments justifica la bona entonació de les guitarres amb trasts paral·lels, per allò que el paral·lelisme ajuda a conservar les proporcions de les longituds. Però a les guitarres sense trasts paral·lels, sense paral·lelisme de cordes ni de trasts, quin teorema pot justificar la seva bona entonació? Atès que la seva retícula no conté cap parell de segments paral·lels, no es pot aplicar el teorema de Tales. I, malgrat tot, la realitat és que aquestes guitarres entonen correctament. Hi ha d'haver una causa matemàtica del fenomen. Un fenomen real inspira la cerca d'un fenomen matemàtic.

Una guitarra entona bé si la intersecció de cada trast amb totes les cordes determina la mateixa fracció vibrant de les cordes que intercepta. S'entreveu que, gràcies al sistema de segments paral·lels (els trasts) i transversals (les cordes), el teorema de Tales justificarà la conservació de les proporcions. El que no és tan clar d'entrada és com es poden justificar les proporcionalitats en un sistema absent de qualsevol paral·lelisme. Però, abans d'encetar la qüestió, convé familiaritzar-se amb les parts principals d'una guitarra (figura 1).

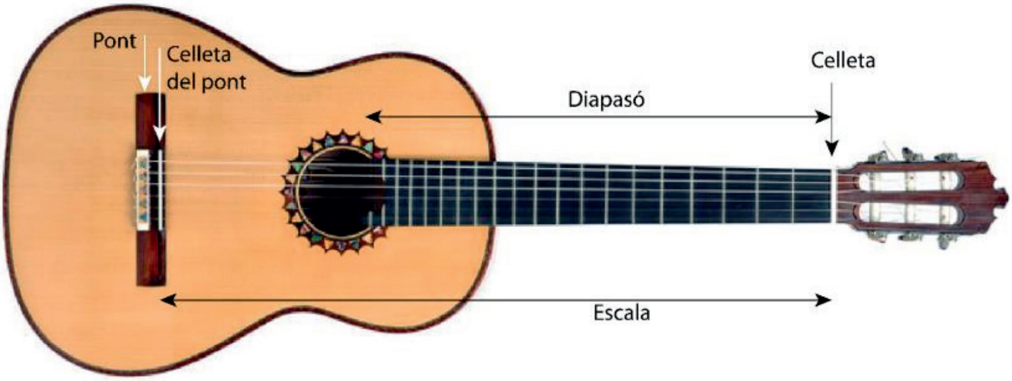

Figura 1. Parts principals d'una guitarra construïda pel lutier Antonio Manjón Martín a Sant Adrià de Besòs (Barcelona).

Els trasts no són equidistants

Els orígens de l'escala musical es troben a la corda tensada que Pitàgores va estudiar, el so de la qual canviava segons la seva longitud. Més curta, so més agut; més llarga, so més greu. El savi grec observà també que algunes fraccions de la corda produïen sons més agradables a l'oïda i més afins amb el de la corda sencera, sobretot les corresponents a la meitat, el quart i el terç (Boyer, 1986). Així naixeren les anomenades consonàncies sonores. Si s'escurça la corda a la meitat, sona l'octava (8a); si s'escurça una quarta part, sona la quarta (4a); si es redueix un terç, sona la quinta (5a). El que no va determinar Pitàgores foren les causes físiques del fenomen, les quals es coneixerien mil·lennis després amb l'estudi de les freqüències sonores.

El to d'un so es quantifica amb cicles per segon, fet que en una corda vibrant equival a la seva freqüència de vibració. En reduir la longitud a la meitat, la freqüència es duplica; en reduir-la a $2/3$, la freqüència es multiplica per $3/2$. En reduir la longitud vibrant a la fracció a/b de la longitud, la freqüència de vibració es multiplica per b/a.

Durant els segles XVII i XVIII es concretaren les bases de les freqüències que definirien el sistema musical occidental conegut com a sistema temperat. Fou un procés complex que va concloure amb la divisió de l'octava en dotze intervals equidistants pel que fa a llurs freqüències de vibració. Cadascun d'aquests dotze intervals s'anomena semitò. Si r és l'augment de freqüència d'una nota al semitò immediat superior, fan falta dotze ascensos, és a dir, multiplicar dotze vegades consecutives per r la freqüència de partida, fins a arribar a l'octava, la nota corresponent a la duplicació de la freqüència original. Això vol dir que pujar un semitò equival a multiplicar la freqüència per 1.059:

$$r \cdot r \cdot cdots^{12\text{ vegades}} \cdots \cdot r = r^{12} = 2 \Longrightarrow r = \sqrt[12]{2} \approx 1.059$$

I dotze pujades successives de semitò equivalen a una pujada directa d'una octava, la freqüència duplicada:

$$Do \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Do\# \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Re \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Re\#Mi \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Fa \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Fa\# \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Sol \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Sol\# \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} La \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} La\# \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Si \underbrace{\to}_{\cdot 1.059} Do$$

L'escala única més corrent avui dia en les guitarres és la de 650 mm. Però ja s'ha dit que les cordes no es disposen paral·leles, sinó que van separant-se regularment, com un ventall, des de la celleta fins al pont. A la celleta la separació acostuma a ser de 8 mm i al pont, d'uns 11 mm. Com a conseqüència, les parts vibrants de les cordes no tenen exactament les mateixes longituds. Les longituds vibrants de les cordes primera i sisena són iguals. També són iguals, però un xic més curtes, les de la segona i la cinquena. També són iguals, però encara una mica més curtes, les de la tercera i la quarta.

A la taula 1 es mostren les posicions dels trasts paral·lels d'una guitarra quan adaptem les freqüències a una escala de 650 mm. No són equidistants i les separacions es van reduint a mesura que s'apropen al pont, la freqüència sonora augmenta i el so es fa més agut.

Taula 1. Posicions dels dotze primers trasts paral·lels d'una guitarra (m: menor, M: major, +: augmentada).

Escala de 650 mm	*Relació*	*Freqüència*	*Interval musical*	*Retall de longitud vibrant de corda (mm)*	*Separació entre trasts consecutius*
0	2^(0/12)	1.000	Uníson	0.000	--
1	2^(1/12)	1.059	2a m	36.482	36.482
2	2^(2/12)	1.122	2a M	70.916	34.434
3	2^(3/12)	1.189	3a m	103.417	32.501
4	2^(4/12)	1.260	3a M	134.095	30.677
5	2^(5/12)	1.335	4a	163.050	28.956
6	2^(6/12)	1.414	4a +	190.381	27.330
7	2^(7/12)	1.498	5a	216.177	25.796
8	2^(8/12)	1.587	6a m	240.526	24.349
9	2^(9/12)	1.682	6a M	263.508	22.982
10	2^(10/12)	1.782	7a m	285.200	21.692
11	2^(11/12)	1.888	7a M	305.674	20.475
12	2^(12/12)	2.000	8a	325.000	19.326

Teorema de l'entonació per a guitarres amb trasts paral·lels

La guitarra clàssica i les seves cosines acústiques i elèctriques tradicionals es construeixen amb trasts paral·lels i separats tal com s'exposa en la taula 1. També comparteixen l'equidistància de cordes a la celleta i al pont. Totes aquestes mides són un xic inferiors en les guitarres amb cordes d'acer que en les que tenen cordes de niló. Una corda al trast VII, per exemple, redueix la seva longitud vibrant als 2/3. Qualsevol altra corda en el mateix trast ha de reduir la seva longitud vibrant als seus 2/3. Com s'assegura això?

Ja s'ha dit que els trasts i les cordes d'una guitarra, des de la celleta fins a la celleta del pont, componen una retícula trapezoidal que s'anomena retícula sonora. Gràcies al paral·lelisme entre ambdues celletes i els trasts, les cel·les d'aquesta retícula també són totes trapezoidals (figura 2).

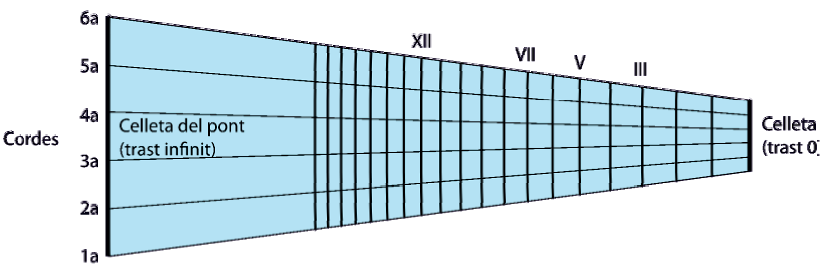

Figura 2. Trapezi sonor de la guitarra.

A més d'això, l'equidistància de les cordes en passar per la celleta i per la celleta del pont fa que interceptin els trasts en cinc parts iguals. A la taula 2 es mostren les seccions corresponents en una guitarra hipotètica de *n* cordes.

Taula 2. Seccions provocades en els trasts per l'equidistància de les cordes.

Corda	*Secció creada per la corda*
1a	$0/(n-1)$
2a	$1/(n-1)$
3a	$2/(n-1)$
...	...
enèsima	$(n-1)/(n-1)$

Els valors de n són discrets i naturals. Però si tenim en compte que els trasts no són equidistants i que, per tant, les seccions que a les cordes provoquen les seves intercepcions no es corresponen amb valors enters, el teorema que necessitem es pot plantejar amb valors reals:

Teorema 1 (d'entonació de les guitarres amb trasts paral·lels). En un trapezi $ABCD$ de costats paral·lels AB i CD, sigui P sobre AC tal que $AC/AP = k$. Aleshores, la paral·lela als costats AB i CD traçada per P determina un punt Q sobre BD que el divideix en la mateixa proporció: $BD/BQ = k$ (figura 3).

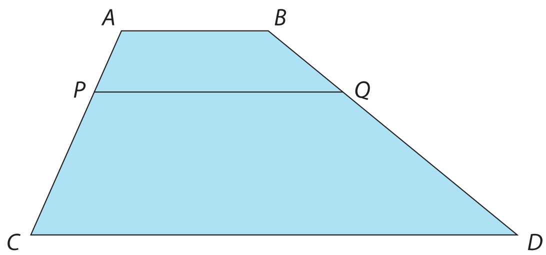

Figura 3. Teorema d'entonació amb trasts paral·lels.

AB i CD vindrien a ser la celleta i la celleta del pont de la guitarra, i PQ, qualsevol trast intermedi entre elles. AC i BD representen qualsevol parell de cordes. Aquest teorema evoca el conegut com a teorema de la paral·lela mitjana, la proposició 2 del llibre VI dels *Elements* (Euclides, 1991):

Teorema 2 (de la paral·lela mitjana). El segment que uneix els punts mitjans de dos costats d'un triangle és paral·lel al tercer costat i la seva longitud és la meitat d'aquest.

El teorema 1 és una generalització del recíproc d'aquest teorema 2. No fa referència als punts mitjans, sinó als punts que divideixen els costats en qualsevol raó k. Tampoc no es limita al triangle, sinó al trapezi. Comencem veient la generalització del recíproc del teorema 2 (de la paral·lela mitjana) al triangle:

Teorema 3 (generalització del recíproc de la paral·lela mitjana). En un triangle ABC, sigui P sobre AC tal que $AC/AP = k$. Aleshores, el punt Q que la paral·lela r a BC traçada per P determina sobre AB, el divideix en la mateixa proporció: $AB/AQ = k$ (figura 4).

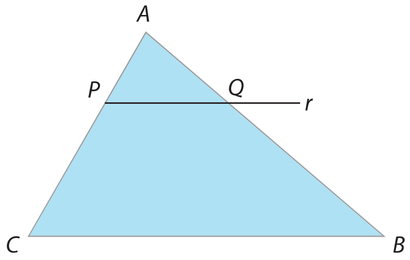

Figura 4. Generalització del teorema de la paral·lela mitjana a una secció *k* qualsevol.

Si PQ i BC són paral·lels, APQ i ABC són triangles semblants. Pel teorema de Tales, els seus costats són proporcionals i la proporció entre AC i AP és la mateixa que la que hi ha entre AQ i AB. Per tant, $AB/AN = k$. Demostrat en el triangle, demostrarem ara la generalització en un paral·lelogram.

Teorema 4 (generalització del teorema 3 al paral·lelogram). En un paral·lelogram $ABCD$, prenem un punt P sobre AC tal que $AC/AP = k$. Aleshores, el punt Q que la paral·lela a BC traçada per P determina sobre BD, el divideix en la mateixa proporció: $BD/BQ = r$ (figura 5).

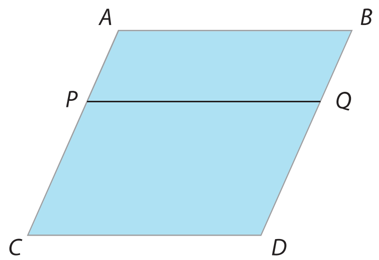

Figura 5. Generalització al paral·lelogram.

Si tracem la diagonal AD del paral·lelogram, obtenim P', el punt de tall de PQ amb AD (figura 6).

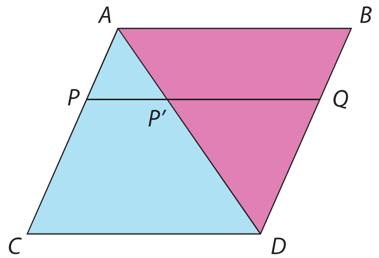

Figura 6. La diagonal d'un paral·lelogram el divideix en dos triangles iguals.

Si apliquem el teorema 3 al triangle ACD, tenim que P' divideix AD en la mateixa proporció que P divideix AC, és a dir: $AD/AP' = k$. Si repliquem el procés al triangle DAB, també Q divideix DB en la mateixa proporció que P' divideix DA : $BD/AP' = BD/BQ = k$.

Per demostrar el teorema 1, la generalització d'aquest últim teorema al trapezi, sigui *ABCD* un trapezi en el qual *P* divideix *AC* en una raó *k*. Veurem que la paral·lela a *CD* traçada per *P* divideix l'altre costat *BD* de la mateixa manera (figura 7):

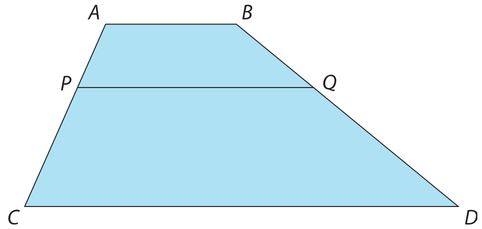

Figura 7. Generalització a qualsevol fracció del recíproc de la paral·lela mitjana.

Si tracem per *A* una paral·lela a *BD*, obtenim dos punts de tall: *D′* sobre *CD* i *P′* sobre *PQ* (figura 8). D'aquesta manera, el trapezi queda descompost en un triangle *ACD′* i en un paral·lelogram *ABDD′*.

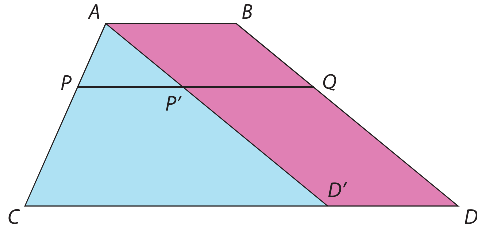

Figura 8. Trapezi dividit en un triangle i un paral·lelogram.

Si apliquem el teorema 3 al triangle *ACD′*, obtenim un punt *P′* que divideix *AD′* en la mateixa proporció que *P* divideix *AC*. Si apliquem el teorema 4 al paral·lelogram *ABDD′*, tenim que *Q* divideix *BD* en la mateixa proporció que *P′* divideix *AD′* i que és, en conseqüència, la mateixa en la qual *P* dividia *AC*. Així queda demostrat el teorema 1 sobre l'entonació en guitarres amb trasts paral·lels i, per extensió, en instruments de corda amb trasts d'aquest tipus. Tal com intuíem, el teorema de proporcionalitat de Tales n'és el rerefons.

Val a dir que el teorema no obliga a observar l'equidistància de cordes a la celleta i a la celleta del pont. Si ambdues són paral·leles i els trasts són paral·lels, qualsevol trast i qualsevol parell de cordes formarà sempre amb la celleta del pont un trapezi (figura 9) que permetrà l'aplicació del teorema 1, i l'instrument entonarà correctament.

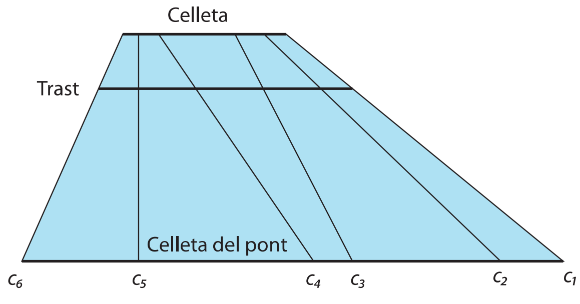

Figura 9. L'equidistància de cordes no és necessària.

El teorema 1 no és altre que el recíproc del teorema del punt mitjà del trapezi referit per De Villiers (2013) i que representa una generalització del teorema de la bimediana:

Teorema 4 (bimediana). Siguin *MN* i *PQ* les medianes dels costats oposats d'un trapezi *ABCD* en el qual els costats *AB* i *CD* són paral·lels. Aleshores, *PQ* i *MN* es tallen pels seus punts mitjans.

Atès que en el teorema 1 les divisions dels costats oposats del trapezi van més enllà dels seus punts mitjans, aquesta és una generalització del teorema de la bimediana.

Teorema d'entonació per a guitarres sense trasts paral·lels

Avui dia es construeixen tot tipus de guitarres d'escala múltiple (figura 10): clàssiques, acústiques, elèctriques... Els motius principals són dos: d'una banda, s'aconsegueix augmentar el nombre de cordes sense que les més greus hagin de ser massa gruixudes per tal de mantenir una tensió i un so equilibrat amb els de les restants, és per això que la majoria de guitarres d'escala múltiple acostumen a tenir més de sis cordes; d'altra banda, els trasts no paral·lels permeten un accés i una posició del canell de la mà esquerra més natural en els primers i últims trasts del diapasó.

Figura 10. Guitarra de nou cordes d'escala múltiple construïda per Daniel Zucali (Haag, Àustria).

Com es mostra a la figura 10, la retícula sonora limitada per la celleta, la celleta del pont i les cordes primera i sisena ja no és trapezoidal, sinó que només té forma de quadrilàter. Les seves cel·les tampoc ja no són trapezoidals. Sense cap paral·lelisme, els teoremes emprats fins ara no són aplicables.

La característica comuna entre aquestes guitarres i les d'escala única és l'equidistància de les cordes. Això fa que les cordes divideixin dos costats oposats del quadrilàter en parts iguals. I atès que també ara cadascun dels trasts ha d'interceptar totes les cordes en punts corresponents a la mateixa proporció, el teorema que justifiqui la bona entonació de l'instrument ve a ser la generalització última del teorema de la paral·lela mitjana, tant pel que fa al polígon d'aplicació (quadrilàter) com pel que fa a la ràtio de les seccions dels costats (qualssevol). L'anomenarem teorema de les divisòries.

Teorema 5 (de les divisòries d'un quadrilàter). En un quadrilàter $ABCD$ es prenen quatre punts M, N, P i Q sobre cadascun dels costats, de manera que $AC/AP = BD/BQ = r$ i $AB/AM = CD/CN = s$ (figura 11). De PQ i MN en direm les divisòries del quadrilàter. Aleshores, el punt O d'intersecció de les dues divisòries verifica que $MN/MO = r$ i $PQ/PO = s$.

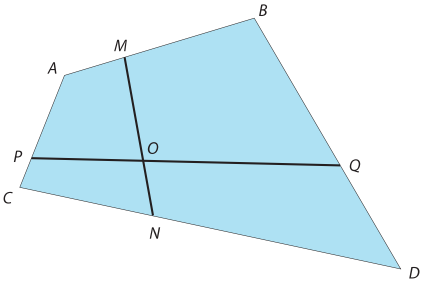

Figura 11. Teorema de les divisòries.

No hi ha cap parell de segments paral·lels a la figura 11, però els podem crear per mirar d'aplicar la recomanació de Polya (1988): adaptar la resolució d'un problema senzill a un de més complex. Si tracem paral·leles a les divisòries PQ i MN pels seus punts de tall amb els costats del quadrilàter i pels quatre vèrtexs d'aquest, aconseguirem superposar una retícula de paral·lelograms damunt del quadrilàter (figura 12).

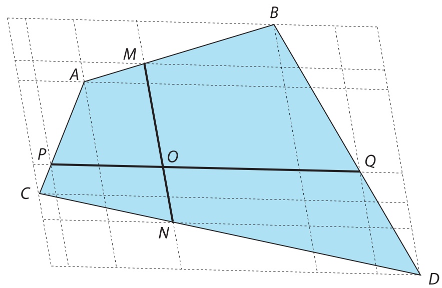

Figura 12. Retícula de paral·lelograms generada per les divisòries *PQ* i *MN*.

Si apliquem el teorema 4 al trapezi $AM''N''C$, tenim que $M''N''/M''O = AC/AP = r$ (figura 13). El mateix teorema aplicat al trapezi $M'BDN'$ permet assegurar que $M'N'/M'O = BD/BQ = r$.

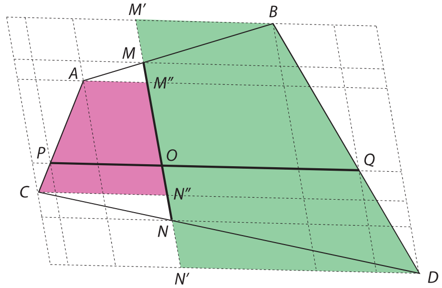

Figura 13. Les divisions d'*AC* i *BD* es propaguen a *M″N″* i *M′N′*.

Fixem-nos ara en els triangles ABA' i CDD' (figura 14). AMM'' i ABA' són triangles semblants perquè tenen els costats paral·lels i perquè la proporció entre els seus costats, la que hi ha entre AM i AB, és s. Pel teorema de Tales, $BA' = s \cdot MM''$. Però $BA' = M'M''$ i, per tant, $M'M'' = s \cdot MM''$, De manera anàloga, en el triangle CDD' trobem que $N'N'' = s \cdot NN''$.

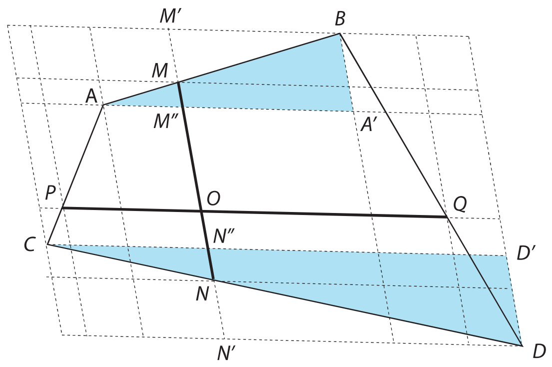

Figura 14. Els triangles *ABA′* i *CDD″*.

En benefici de la claredat d'exposició, direm que $x = MM''$, $y = NN''$ i $z = M''O$, i escriurem els segments $M'N'$ i BD' en aquests termes:

$$\begin{aligned} M'N' &= M'M'' + M''N'' + N''N' = s \cdot MM'' + r \cdot M''O + s \cdot NN'' = s \cdot x + r \cdot z + s \cdot y \\ BD' &= r \cdot M'O = r \cdot (M'M'' + M''O) = r \cdot (s \cdot MM'' + M''O) = r \cdot (s \cdot x + z) \end{aligned}$$

Atès que $M'N' = BD'$:

$$\begin{aligned} sx + rz + sy &= r \cdot (sx + z) \\ sx + rz + sy &= rsx + rz \end{aligned}$$

Això permet descompondre MN i obtenir la conclusió:

$$MN = x + rz + y = rz + rx = r \cdot (x + z) = r \cdot MO$$

Si apliquem el mateix procediment a la divisòria PQ, arribarem a un resultat anàleg: $PQ = s \cdot OP$. Com es volia demostrar, el punt O divideix cada divisòria en les mateixes raons en les quals cada divisòria divideix els costats oposats del quadrilàter.

El teorema és fals si les divisòries no seccionen els costats oposats que connecten en la mateixa raó, com es posa de manifest a la figura 15. El trast XII divideix per la meitat les cordes c_1 i c_3. Però no fa el mateix amb la corda c_2: $x_1 > x_2$. Això vol dir que si les guitarres d'escala múltiple no es fessin amb equidistància de cordes en la celleta i en la celleta del pont, l'entonació esdevindria impossible.

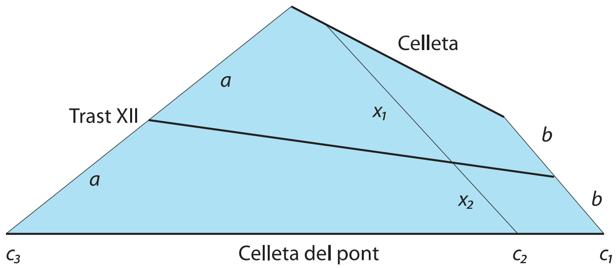

Figura 15. Sense l'equidistància de cordes les guitarres d'escala múltiple no entornarien.

Matemàtiques, treball artesà i aprenentatge

A la xarxa Internet hom troba moltes webs on lutiers d'arreu expliquen com construeixen guitarres d'escala múltiple amb trasts no paral·lels. Hi ha guitarres en les quals el trast perpendicular a la mediatriu del diapasó és el VII; en d'altres, en canvi, és el XII. Segons escriuen els lutiers, això depèn tant del guitarrista com de les escales (longituds vibrants de les cordes) i del nombre de cordes que tindrà la guitarra. La recerca sobre la justificació geomètrica de la bona entonació no va produir cap resultat.

Els orígens d'aquestes guitarres són del segle XVI, quan a Europa es va construir un instrument anomenat *bandora* que no tenia els trasts paral·lels. Tres segles després, Novak (1988) va patentar als Estats Units una guitarra d'escala múltiple. En el document de registre explica com funciona, però tampoc no ofereix cap justificació de la seva entonació correcta.

Aquest treball s'ha redactat pensant en diapasons plans. Les guitarres acústiques i elèctriques es fan amb diapasons corbats, però les cordes es disposen sobre ells observant l'equidistància pròpia dels diapasons plans. Per tant, tots els teoremes desenvolupats són aplicables també a aquest tipus de diapasons. La situació es pot il·lustrar imprimint el diapasó d'una guitarra i després enrotllar-lo en forma de tub. El diapasó esdevé una superfície cilíndrica amb trasts circulars, mentre que les cordes continuen essent rectilínies.

De les diverses relacions entre les matemàtiques i l'entorn, es destaca aquí que un fenomen de l'entorn inspira el desenvolupament de coneixement matemàtic. Es tracta d'un tipus de relació ja assenyalada en un estudi sobre l'ús de les matemàtiques en l'àmbit laboral (Albertí, 2009 i 2022). En aquesta ocasió, el producte d'un treball artesà com el de la lutieria ha inspirat el teorema de les divisòries amb el qual es pot justificar geomètricament la bona entonació de les guitarres, amb o sense trasts paral·lels. I, per extensió, la dels instruments de corda amb trasts. Això invita a pensar en la possibilitat de trobar més qüestions rellevants per a les matemàtiques en aquesta activitat artesana.

Pensem, per exemple, en el fet que l'equidistància de cordes no sigui necessària en les guitarres d'escala única (amb trasts paral·lels), però esdevingui essencial en les d'escala múltiple (amb trasts no paral·lels). Un cop situades la primera i la sisena cordes, les instruccions d'un lutier de guitarres amb cordes d'acer, per posar les restants són: «[. . .] espaiar les quatre cordes interiors de manera que equidistin l'una de l'altra. L'espai equidistant s'hauria de determinar *entre* (sic) les cordes, i no des dels seus centres» (Benedetto, 1994: 187). Aquest «entre» destacat pel lutier vol dir que les equidistàncies s'han de prendre des dels perfils de les cordes, i no des dels seus centres. La diferència no és gaire important en guitarres amb cordes de niló perquè tots els seus gruixos són força semblants, ja que només oscil·len entre 0,7 mm i 1,1 mm. En canvi, en les guitarres amb cordes d'acer, la diferència de gruix entre la primera corda (0,28 mm) i la sisena (1,32 mm) supera el mil·límetre. Si amb cordes semblants l'equidistància es pren des dels centres, la separació entre els perfils de la cinquena i la sisena cordes podria superar en més d'1 mm la separació entre els perfils de la primera i la segona. Massa diferència per no afectar l'execució. Però no calia que Benedetto es preocupés per l'entonació, ja que les guitarres de les quals parlava tenien els trasts paral·lels i, com s'ha demostrat, l'equidistància no és essencial per preservar l'entonació. I, això, tenint en compte que en els models geomètrics utilitzats hem pres una corda com un segment sense gruix. Les instruccions de Benedetto potser no són, doncs, les més apropiades per a aquest tipus d'instruments.

Això planteja una qüestió essencial sobre la lutieria: ¿l'equidistància de les cordes a la celleta i a la celleta del pont en les guitarres d'escala múltiple és decisió del lutier per preservar l'entonació de l'instrument o és una decisió inconscient que trasllada automàticament a aquestes guitarres la manera amb què es construeixen les guitarres d'escala única? Valdria esbrinar-ho directament dels professionals de la lutieria. En benefici seu i en benefici de les matemàtiques, seria bo fer una interpretació matemàtica situada d'aquest ofici basada en les tres fases en les quals es pot dividir una activitat artesana: l'obra acabada, l'obra en curs i l'obra en projecte (Albertí, 2007). Els teoremes desenvolupats interpreten matemàticament un aspecte de l'obra acabada i n'estableixen les causes des d'una perspectiva matemàtica. Analitzar l'obra en curs i l'obra projectada passaria per veure què fan els lutiers i què responen quan se'ls interpel·la sobre el que volen fer.

A més, la lutieria no hauria d'ignorar les conseqüències que determinats fets i, possiblement, determinats costums poden tenir en la seva feina. En aquest sentit, la col·laboració entre matemàtiques i artesania enriquiria ambdues activitats. De manera natural estem parlant d'aprenentatge. I les implicacions per a l'aprenentatge acadèmic es poden adreçar a dues qüestions principals:

a) D'una banda, la modelització matemàtica de fenòmens de l'entorn. Els entorns social, cultural i natural es componen de multitud de fenòmens que massa sovint, tot i ser extraordinàriament quotidians, ens passen desapercebuts. És, de fet, la seva quotidianitat la que ens impedeix mirar-nos-els des d'una perspectiva diferent. La guitarra és un dels instruments musicals més populars. Però rarament parem esment en el seu potencial com a recurs d'aprenentatge matemàtic. No hi ha res més important en qualsevol instrument musical que l'entonació correcta. Tot plegat fa de l'entonació un tema per tractar matemàticament a l'educació secundària. El cas de les guitarres d'escala única és força abordable atesa la seva relació amb el teorema de Tales. Alhora, n'eixampla l'àmbit tradicional d'aplicació. Ara sabem que el teorema de Tales també serveix per explicar l'eficàcia de les retícules sonores de les guitarres. El cas de les guitarres d'escala múltiple necessita un coneixement més profund dels *Elements* d'Euclides que rarament es pot tractar a l'educació secundària.
b) D'altra banda, la demostració matemàtica. La modelització digital permet abordar la qüestió de l'entonació de les guitarres d'escala múltiple de manera més directa, sense

haver d'aprofundir gaire en la geometria euclidiana. Si duem a terme una dinamització digital amb GeoGebra, podem confirmar el teorema de les divisòries. Sabrem que el teorema és cert. Segons Carrillo (2012), l'haurem «demostrat» (sic). Però GeoGebra rarament demostra. GeoGebra confirma o refusa. I si confirma la certesa sense que acabem d'entendre-la, es farà clar que n'haurem de continuar buscant les causes. Això pot implicar créixer més culturalment. És a dir, aprendre per entendre. La comprensió definitiva no arribarà mentre no demostrem el teorema amb la metodologia pròpia de l'àmbit en el qual fou plantejat: el de la geometria euclidiana.

Tot s'ha desenvolupat en el pla bidimensional, però el so es produeix en un espai tridimensional on s'haurien de considerar més variables. Els materials de les cordes, els seus diàmetres, les altures sobre els trasts, tot això afecta lleugerament, però afecta, l'entonació. La realitat del lutier és que tot instrument es dissenya sobre papers i plantilles planes, on els trasts se situen al diapasó respectant les distàncies descrites. Un cop acabat l'instrument, la realitat entra en joc i s'han de fer ajustaments per restablir la bona entonació planejada sobre el paper. Sovint cal desplaçar o esmolar un xic la celleta del pont (unes dècimes de mm) o usar cordes lleugerament més primes o més gruixudes. En fer-ho, el lutier torna a la geometria de l'instrument allò que la realitat li havia tret.

Agraïment

Vull fer arribar el meu agraïment a Antonio Manjón Martín, lutier de Sant Adrià de Besòs (Barcelona), i a Daniel Zucali, lutier de Haag (Àustria), per cedir les fotografies de les seves guitarres que il·lustren aquest article.

Bibliografia

Albertí, M. (2007). *Interpretació matemàtica situada d'una pràctica artesanal*. Tesi doctoral dirigida per Núria Gorgorió i Solà. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Albertí, M. (2009). *Activitat matemàtica en l'àmbit laboral a l'inici del segle XXI: Implicacions per al currículum de l'ESO*. Memòria del projecte de recerca per a la llicència retribuïda concedida pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Albertí, M. (2022). *La retícula matemática: Uso y recurso más allá del espacio bidimensional.* Madrid: Catarata (Miradas Matemáticas).

Benedetto, R. (1994), *Making an Archtop guitar: The definitive work on the design and construction of an acoustic archtop guitar*. Centerstream Publishing CA. USA.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Carrillo, A. (2012). «Demostración de teoremas con GeoGebra, ?'es posible?». *Épsilon: Revista de Educación Matemática*, vol. 29(3), núm. 82, 79-87.

De Villiers, M. (2013). «A trapezium theorem generalized». *At Right Angles* [Azim Premji University], vol. 2, n. 3.

Euclides (1991). *Elementos*. Traducció de María Luisa Puertas Castaños. Barcelona: Gredos.

Novak, R. (1988). *Fingerboard for a stringed instrument*. Patent 4852450. USA.

Polya, G. (1988). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. New Jersey: Princeton Science Library / University Press. [reed. de l'original de 1945].